

# **IDENTYFIKACJA DEFECTÓW W KONSTRUKCJACH PRĘTOWYCH NA PODSTAWIE METODY DYSTORSJI WIRTUALNYCH**

**ANDRZEJ ŚWIERCZ, PRZEMYSŁAW KOŁAKOWSKI,  
JAN HOLNICKI - SZULC**  
*Smart-Tech Centre*  
*Instytut Podstawowych Problemów Techniki, PAN*  
*ul. Świętokrzyska 21, 00-049 Warszawa*  
[aswiercz@ippt.gov.pl](mailto:aswiercz@ippt.gov.pl), [pkolak@ippt.gov.pl](mailto:pkolak@ippt.gov.pl), [holnicki@ippt.gov.pl](mailto:holnicki@ippt.gov.pl)

## **STRESZCZENIE**

Celem pracy jest zaprezentowanie Metody Dystorsji Wirtualnych do identyfikacji parametrów konstrukcyjnych w ustrojach prętowych. Podstawą do jej przeprowadzenia są różnice w pomiarach wykonanych na konstrukcji oryginalnej (początkowej) i zmodyfikowanej będących pod działaniem zadanego obciążenia. Przedstawiono adaptację metody VDM do zagadnień drgań konstrukcji kratowych w domenie częstości i czasu wraz z numerycznymi przykładami.

## **1. Wprowadzenie**

Problem podejmowany w niniejszej pracy należy do intensywnie rozwijającej się w ostatnich latach dziedziny, zajmującej się badaniem i oceną stanu technicznego konstrukcji (ang. Structural Health Monitoring, SHM). Wyczerpującą definicję i zakres podejmowanych przez SHM problemów można znaleźć w pracy [1]. Zależnie od zakresu prowadzonych badań jej celem jest wykrycie obecności, lokalizacji, a także intensywności pojedynczego lub wielokrotnych uszkodzeń.

Metody monitorowania konstrukcji możemy podzielić na lokalne - wywodzące się z tzw. badań nieniszczących (Non-Destructive Testing, NDT) oraz globalne. Podstawą metod globalnych, do których zalicza się omawiane tu podejście, jest analiza drgań konstrukcji o niskiej częstotliwości, poniżej  $5kHz$  (Vibration-Based Methods, VB), których przegląd można znaleźć w pracy [2]. Zazwyczaj identyfikacja uszkodzeń wymaga modelu numerycznego, wykalibrowanego z monitorowanym obiektem, i polega na dostosowaniu modelowanych parametrów konstrukcji do jej aktualnego stanu.

Metoda Dystorsji Wirtualnych (MDW) jest metodą szybkiej reanalizy konstrukcji, w której zmiany parametrów ustrojów są modelowane za pomocą tzw. *pól dystorsji wirtualnych*. Stanowią one wstępne odkształcenia i siły wprowadzone do konstrukcji początkowej, dzięki którym pola uogólnionych odkształceń i sił wewnętrznych są tożsame dla konstrukcji modelowanej i zmodyfikowanej (uszkodzonej). Pola dystorsji wirtualnych są jednoznacznie powiązane z modelowanymi parametrami ustroju. W pracy przedstawione są sformułowania MDW zarówno w domenie czasowej, jak i w domenie częstości, dla drgań ustalonych o zadanej częstości wymuszenia.

## 2. Podstawy Metody Dystorsji Wirtualnych -statyka

W zagadnieniach statyki *dystorsją wirtualną*  $\varepsilon_\alpha^0$  określa się wstępne odkształcenie nałożone na element skończony *konstrukcji początkowej* modelujące, zależnie od przyjętej definicji, zmianę modułu Young'a lub przekroju poprzecznego tego elementu. Przez pojęcie konstrukcji początkowej rozumiemy taką konstrukcję, dla której znane są wszystkie parametry oraz jej odpowiedzi na zadane obciążenie. W odróżnieniu od konstrukcji początkowej, *konstrukcję zmodyfikowaną* charakteryzują odmienne parametry w poszczególnych elementach skończonych. Nakładając pole dystorsji wirtualnych na konstrukcję początkową otrzymujemy *konstrukcję modelowaną dystorsjami*. Następnie żądamy spełnienia postulatu, aby konstrukcja modelowana dystorsjami i konstrukcja zmodyfikowana były tożsame w sensie równości ich uogólnionych sił wewnętrznych i odkształceń.

W przypadku kratownic postulat ten sprowadza się do zależności:

$$\underline{\mu}_\alpha \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\alpha^0, \quad (1)$$

w której zdefiniowano wektor modyfikacji parametrów  $\underline{\mu}_\alpha$ :

$$\underline{\mu}_\alpha = \frac{\hat{k}_\alpha^{EA}}{k_\alpha^{EA}} = \frac{\hat{E}_\alpha}{E_\alpha}, \text{ lub } \underline{\mu}_\alpha = \frac{\hat{A}_\alpha}{A_\alpha}, \quad (2)$$

(podkreślonych indeksów nie należy sumować). Szczegółowe wyprowadzenie tych związków można znaleźć w pracy [3]. Istotny jest tutaj fakt, że związek (1)

łączy parametry modyfikacji konstrukcji  $\mu_\alpha$  oraz dystorsje wirtualne  $\varepsilon_\alpha^0$ . Znając dystorsje wirtualne, wyznaczone dla danego wektora modyfikacji  $\mu_\alpha$ , odkształcenia konstrukcji modelowanej dystorsjami możemy wyznaczyć zgodnie ze wzorem:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha^L + D_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta^0, \quad (3)$$

gdzie  $\varepsilon_\alpha^L$  stanowi wektor odkształceń wyznaczony dla konstrukcji początkowej, a macierz  $D_{\alpha\beta}$  jest tzw. *macierzą wpływu*. Macierz wpływu zawiera odkształcenia elementu  $\alpha$  wywołane nałożeniem na element  $\beta$  jednostkowej dystorsji wirtualnej  $\varepsilon_\beta^0 = 1$ .

### 3. Metoda Dystorsji Wirtualnych w domenie częstości (VDM-F) dla konstrukcji kratowych

Równanie ruchu Metody Elementów Skończonych (MES) konstrukcji obciążonej harmonicznymi o częstości  $\omega$ , jest wyrażone następująco (z pominięciem tłumienia):

$$-\omega^2 M_{ij} u_j + K_{ij} u_j = F_i, \quad (4)$$

gdzie  $F_i$  i  $u_i$  stanowią odpowiednio amplitudy siły wymuszającej i przemieszczeń w  $i$ -tym stopniu swobody,  $M_{ij}$  – macierz mas,  $K_{ij}$  – macierz sztywności. Zakładamy, że te macierze nie zależą od czasu i częstości wymuszenia.

W zadaniach dynamiki zmiana geometrii przekroju poprzecznego elementu ramowego powoduje zmianę nie tylko macierzy sztywności  $K_{ij}$ , lecz również macierzy mas  $M_{ij}$ , co może mieć istotny wpływ na zachowanie całego układu (szczególnie w przypadkach drgań o wyższej częstości). Modelowanie modyfikacji bezwładności konstrukcji uzyskuje się poprzez wprowadzenie dodatkowych dystorsji wirtualnych w postaci:

$$\tilde{p}_i^0(t) = p_i^0 \sin(\omega t), \quad (5)$$

pamiętając, że w związku (1) składowe odkształceń są teraz zależne również od dystorsji  $p_i^0$ . Rozpatrzmy teraz konstrukcję zmodyfikowaną oraz modelowaną amplitudami dystorsji wirtualnych  $\varepsilon_\alpha^0$  oraz  $p_i^0$ . Równania je opisujące mają postać:

$$-\omega^2 \hat{M}_{ij} u_j + \hat{K}_{ij} u_j = F_i, \quad -\omega^2 M_{ij} u_j + K_{ij} u_j^0 = F_i + p_i^0, \quad (6)$$

gdzie  $\hat{M}_{ij}$ ,  $\hat{K}_{ij}$  są zmodyfikowanymi macierzami mas i sztywności,  $u_j^0$  stanowi amplitudy pól dystorsji przemieszczeń związanych z  $\varepsilon_\alpha^0$ . Odejmując stronami powyższe równania, otrzymamy związek pomiędzy wektorem modyfikacji

parametrów  $\mu_\alpha$ , a wektorami amplitud dystorsji wirtualnych  $\varepsilon_\alpha^0$  i  $p_i^0$ :

$$p_i^0 = -\omega^2 \Delta M_{ij}(\mu_\alpha) u_j(\varepsilon_\alpha^0, p_k^0) \quad (7)$$

gdzie  $\Delta M_{ij}(\mu_\alpha) = M_{ij} - \hat{M}_{ij}$  jest różnicą macierzy mas konstrukcji początkowej i zmodyfikowanej. Z uwagi na występowanie zaktualizowanych pól przemieszczeń i odkształceń (w konstrukcji modelowanej dystorsjami) konieczne jest wyznaczenie macierzy wpływu: odkształceniowych  $D_{\alpha\beta}^\varepsilon$ ,  $D_{\alpha i}^p$  i przemieszczeniowych  $B_{i\alpha}^\varepsilon$ ,  $B_{ik}^p$ . Macierze te, obliczamy generując dystorsje wirtualne o jednostkowych amplitudach w konstrukcji. Dzięki tym macierzom, znając amplitudy pól dystorsji wirtualnych, możemy obliczyć amplitudy składowych odkształceń i przemieszczeń konstrukcji modelowanej dystorsjami:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha^L + D_{\alpha\beta}^\varepsilon \varepsilon_\beta^0 + D_{\alpha i}^p p_i^0, \quad u_i = u_i^L + B_{i\alpha}^\varepsilon \varepsilon_\alpha^0 + B_{ik}^p p_k^0. \quad (8)$$

Wykorzystując wzory (1) i (7) oraz związki pozwalające obliczać zaktualizowane odpowiedzi konstrukcji (8) otrzymujemy układ równań, z którego wyznaczymy amplitudy dystorsji wirtualnych:

$$\begin{bmatrix} \delta_{\alpha\beta} - (1 - \mu_\alpha) D_{\alpha\beta}^\varepsilon & -(1 - \mu_\alpha) D_{\alpha k}^p \\ -\omega^2 \Delta M_{ij} B_{j\beta}^\varepsilon & -\delta_{ik} - \omega^2 \Delta M_{ij} B_{jk}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_\beta^0 \\ p_k^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \mu_\alpha) \varepsilon_\alpha^0 \\ \omega^2 \Delta M_{ij} u_j^0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Wrażliwość względem modelowanych parametrów  $\mu_\alpha$ , możemy wyznaczyć z układu równań, otrzymanego po zróżniczkowaniu związków (9):

$$\begin{bmatrix} \delta_{\alpha\beta} - (1 - \mu_\alpha) D_{\alpha\beta}^\varepsilon & -(1 - \mu_\alpha) D_{\alpha k}^p \\ -\omega^2 \Delta M_{ij} B_{j\beta}^\varepsilon & -\delta_{ik} - \omega^2 \Delta M_{ij} B_{jk}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_\beta^0}{\partial \mu_\alpha} \\ \frac{\partial p_k^0}{\partial \mu_\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \omega^2 \frac{\partial \Delta M_{ij}}{\partial \mu_\alpha} u_j \end{bmatrix} \quad (10)$$

Formułując problem optymalizacji będziemy uwzględniać dyskretny zbiór częstotliwości. Minimalizowaną funkcję celu przyjmijemy jako unormowaną miarę w postaci:

$$F = \sum_\omega \sum_\alpha \left[ \frac{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\alpha^M}{\varepsilon_\alpha^M} \right]^2. \quad (11)$$

Wektor modyfikacji parametrów konstrukcji  $\mu_\alpha$  jest iteracyjnie wyznaczany metodą największego spadku:

$$\mu_\alpha^{(k+1)} = \mu_\alpha^{(k)} - \lambda F^{(k)} \frac{\nabla_\alpha F^{(k)}}{[\nabla_\alpha F^{(k)}]^T \nabla_\alpha F^{(k)}}, \quad (12)$$

gdzie  $\lambda \in \langle 0.1, 0.3 \rangle$  jest parametrem optymalizacji, a  $\nabla_\alpha F^{(k)}$  jest gradientem

funkcji celu obliczonym w  $k$ -tej iteracji.

#### 4. Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych (VDM-T)

Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych (MIDW, VDM-T) jest metodą reanalizy konstrukcji w domenie czasowej, w której odpowiedzi - dystorsje wirtualne, macierze wpływu - są zależne od czasu. Jej podstawą jest metoda impulsowej funkcji przejścia, w której obciążenie jest reprezentowane przez sumę elementarnych impulsów (delta Diraca, zob. [3]).

Posługując się macierzami wpływu, zaktualizowane odpowiedzi konstrukcji wyrażamy w odkształceniach  $\varepsilon_\alpha(t)$ :

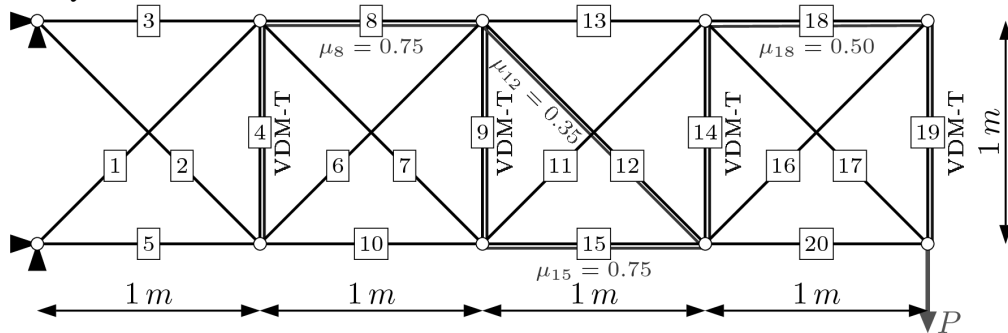
$$\varepsilon_\alpha(t) = \varepsilon_\alpha^L(t) + \varepsilon_\alpha^R(t) = \varepsilon_\alpha^L(t) + \sum_{\tau=0}^t D_{\alpha\beta}(t-\tau)\varepsilon_\alpha^0(\tau). \quad (13)$$

Związki pomiędzy składowymi odkształceniami i dystorsjami wirtualnymi są tutaj analogiczne do (1), przy czym składowe odkształcenia i dystorsje wirtualnych są zależne od czasu.

Wyznaczenie dystorsji wirtualnych  $\varepsilon_\alpha^0(t)$  na zadany wektor parametrów modyfikacji  $\mu_\alpha$  otrzymuje się ze związków (1) oraz (13) i przebiega dwuetapowo odpowiednio dla chwili  $t = 0$  i chwil  $t > 0$ .

#### 5. Testy numeryczne kratownicy

Dana jest płaska kratownica (rys. 1), której całkowita długość wynosi  $4m$ , a szerokość i wysokość pojedynczej sekcji  $1m$ . Przyjęto, że wszystkie jej elementy wykonane są ze stali o module Younga  $E = 210GPa$  i gęstości  $\rho = 7800 \frac{kg}{m^3}$ , a pola przekrojów poprzecznych wynoszą  $A = 10^{-4}m^2$ . Rys. 1 przedstawia kratownicę wraz z wprowadzonymi modyfikacjami i lokalizacjami sensorów dla metody VDM-T.



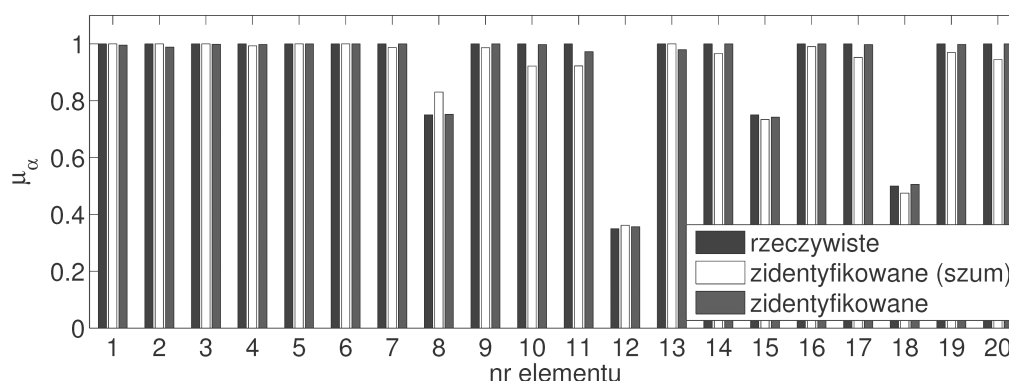
Rys. 1 Testowana kratownica wraz z wprowadzonymi defektami i sensorami.

**Identyfikacja uszkodzeń metodą VDM-F.** Identyfikacja uszkodzeń kratownicy (rys. 1) zostanie przeprowadzona dla czterech częstości:

$$\omega_i = [100 \ 700 \ 2100 \ 3650]^T \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

W metodzie VDM-F założono, że sensory, mierzące odkształcenia, rozlokowane są we wszystkich elementach kratownicy. Amplitudy odkształceń  $\varepsilon_\alpha^M$  konstrukcji zmodyfikowanej (pola przekroju) zostały wygenerowane numerycznie.

Wartości parametrów modyfikacji  $\mu_\alpha$  po 51 iteracjach (czas obliczeń ok. 1 minuta) obrazuje rys. 2. Spadek funkcji celu wynosił 3 rzędy wielkości (metoda największego spadku). Rzeczywiste pomiary drgań konstrukcji obarczone są pewnym błędem, a zatem uzasadnione jest uwzględnienie tego efektu w obliczonych amplitudach odkształceń. Dla porównania, została przeprowadzona dodatkowa analiza, w której wartości amplitud  $\varepsilon_\alpha^M$  zostały losowo zaburzone do 10% (symulacja szumu). Na rys. 2, porównano rezultaty analiz odwrotnych.



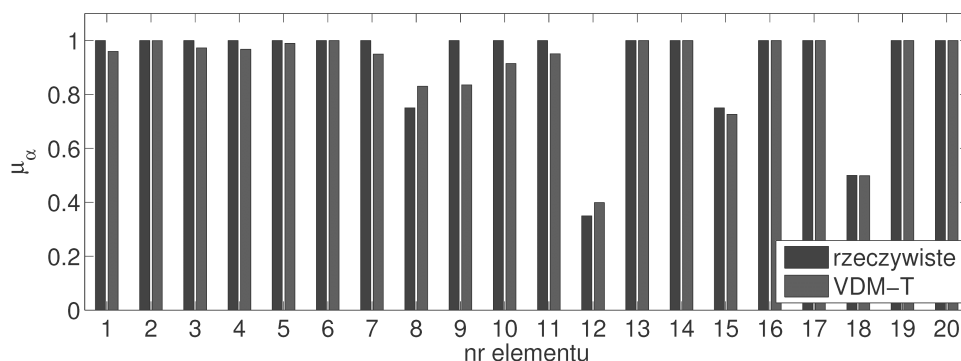
Rys. 2 Porównanie wyników identyfikacji uszkodzeń oraz rzeczywiste modyfikacje.

Proces optymalizacji funkcji celu w przypadku numerycznie wygenerowanego szumu został zatrzymany po 300-tu iteracjach, dając spadek funkcji celu o 2 rzędy wielkości, przy jednoczesnym braku tendencji do dalszej poprawy wyniku. Pomimo tego, otrzymany rozkład modyfikacji parametrów w konstrukcji można uznać za poprawny.

**Identyfikacja uszkodzeń metodą VDM-T.** Będziemy teraz rozpatrywać taki sam rozkład defektów jak w przypadku metody VDM-F, lecz modelowanym parametrem w każdym elemencie będzie moduł Young'a, tj.  $\mu_\alpha = \frac{\hat{E}_\alpha}{E_\alpha}$ .

Sygnal wymuszający stanowiła trójkątnie modulowana funkcja sinus (8 okresów o częstotliwości  $100\text{rad/s}$ ) o amplitudzie  $P = 200N$ .

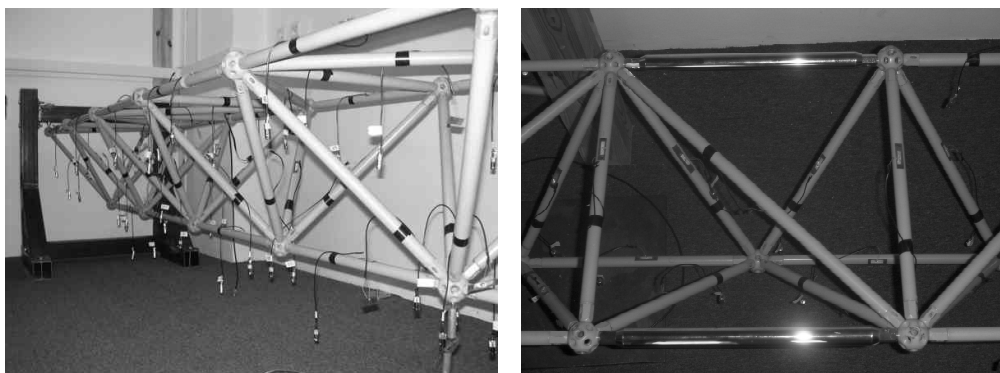
Wyniki analizy odwrotnej zilustrowano i porównano na rys. 3. Czas obliczeń potrzebny na wykonanie tego zadania wyniósł ok. 300 minut.



Rys. 3 Porównanie wyników identyfikacji uszkodzeń z rzeczywistymi modyfikacjami.

## 6. Weryfikacja doświadczalna

Przedmiotem badania doświadczalnego jest trójwymiarowy dźwigar kratownicowy, złożony z 70 elementów, którego widok ogólny jest przedstawiony na rys. 4.



Rys. 4 Testowany dźwigar kratownicowy. Widok ogólny (z lewej), wprowadzone modyfikacje w konstrukcji (z prawej).

Drgania harmoniczne o częstotliwości  $35\text{Hz}$  są wywoływane za pomocą aktywatora piezoelektrycznego, umieszczonego w środkowej części konstrukcji, pomiędzy podłogą a konstrukcją. Na każdym elemencie przyklejony jest sensor piezoelektryczny, na którego okładkach gromadzi się ładunek elektryczny.

Ładunek ten jest proporcjonalny do odkształcenia elementu, na którym umieszczony jest czujnik. Konstrukcję zmodyfikowaną uzyskano przez wymianę 2 elementów na inne w wybranej sekcji (por. rys. 4). Te zmodyfikowane elementy są wykonane z tego samego gatunku stali, lecz mają zmienione pole przekroju. Celem zadania odwrotnego jest zlokalizowanie i zidentyfikowanie tych modyfikacji. Badania tej konstrukcji są w fazie kalibracji modelu numerycznego, a wyniki zostaną przedstawione w przyszłości.

## 7. Podsumowanie

W pracy przedstawiono Metodę Dystorsji Wirtualnych sformułowaną w domenie częstotliwości (VDM-F) oraz czasu (VDM-T). Metoda ta pozwala na efektywną i szybką reanalizę konstrukcji. W niniejszej pracy VDM została zastosowana do identyfikacji uszkodzeń w konstrukcjach prętowych. W algorytmie identyfikacji zastosowano gradientową metodę optymalizacji (największego spadku).

Istotne różnice w zaprezentowane podejściach to:

- czas analizy odwrotnej przy zastosowaniu algorytmów VDM-T jest ok. 300 razy dłuższy niż podobna analiza metodą VDM-F,
- wymagana liczba sensorów dla VDM-F jest znacznie większa niż w alternatywnym sformułowaniu VDM-T – wynika to z quasi-statycznego charakteru zadania przy wymuszeniu harmonicznym.

Dalsze badania będą dotyczyć optymalnej lokalizacji i sygnału wymuszającego. W ten sposób można zwiększyć dokładność detekcji uszkodzeń lub/i zminimalizować liczbę sensorów. Liczba sensorów może mieć istotne znaczenie w przypadkach, gdy utrudniony jest dostęp do części badanego obiektu. Przy ocenie stanu technicznego konstrukcji należy uwzględnić historię rozwoju uszkodzeń (regularny monitoring). Powinno to umożliwić oszacowanie czasu eksploatacji, w którym obiekt zapewni bezpieczeństwo w warunkach normalnego użytkowania.

## Referencje

- [1] Sohn H., Farrar C.R., Hemez F.M., Shunk D.D., Stinemates D.W., Nadler B.R. *A review of structural health monitoring literature: 1996-2001*, Los Alamos National Laboratory Report, 2003.
- [2] Kołakowski P. *Structural health monitoring – a review with the emphasis on low-frequency methods*. Engineering Transactions, 2007.
- [3] Zieliński T. G. *Metoda Impulsowych Dystorsji Wirtualnych z zastosowaniem do modelowania i identyfikacji defektów w konstrukcjach*. Praca doktorska, IPPT PAN, 2004.